Διάλεξη 3η ΕΥΚΛΕΙΔ. ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛ. ΓΕΩΜ

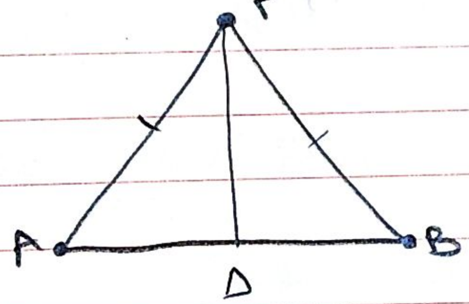
18/11/2019

Πρόταση: Από σημείο εκτός ευθείας έρχεται κάθετη προς αυτή.

Πρόταση: Κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει μέσο.

Απόδ.

Παρατηρώ ότι δοθέντος ευθ. τμήματος AB υπάρχει ισοσκελές με βάση AB.
Θεωρώ Γ εκτός AB (ορίζουν τρίγωνο) αν
$Γ\hat{A}B = Γ\hat{B}A$.
Έστω $Γ\hat{A}B \neq Γ\hat{B}A$ και χβγ $Γ\hat{A}B > Γ\hat{B}A$ άρα
∃ γωνία $E\hat{A}B = Γ\hat{B}A$ => το $E\hat{A}B$ ισοσκελές (βάση AB)
Έστω τώρα το ευθ. τμήμα AB και από ισχυρισμό γνωρίζω ότι ∃ ισοσκελές τρίγωνο με βάση AB. Έστω $A\hat{B}Γ$, από (Π1) ∃ κάθετη από το Γ στο AB => τα $A\hat{Δ}Γ = Γ\hat{Δ}B$

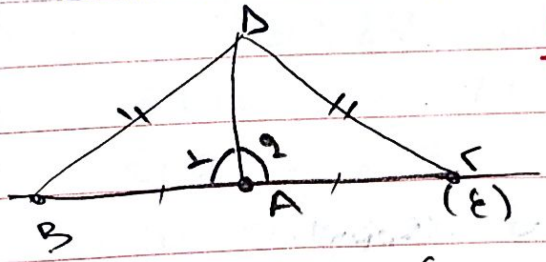


κριτήριο ισότητας ορθογωνίων (1ο)

=> { ΑΓ = ΓΒ, ΓΔ: κοινή, οξεία ίση (ισοσκ.) } => ΑΔ = ΔΒ => Δ: μέσο//

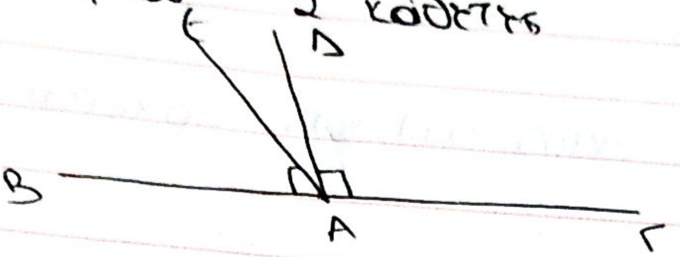
Πρόταση: Για κάθε ευθεία (ε) και σημείο (Α) αυτής υπάρχει μοναδική κάθετη προς το Α.

Απόδ.



Εκατέρωθεν του Α, επιλέγω Β, Γ : ΒΑ = ΑΓ (1ο αξίωμα ισοτ.)
Θεωρώ το ισοσκελές με βάση (ΒΓ) (έστω ΒΔΓ).
Θεωρώ την ΔΑ => $A\hat{B}Δ = A\hat{Δ}Γ$ (ΠΠΠ 3ο κριτήριο)
=> $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και παραπληρωματικές => $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = ⊥$ άρα ΑΔ: κάθετη.

Εδείξα ότι υπάρχει μία. Τώρα για την μοναδικότητα
Έσω υπάρχουν 2 κάθετες

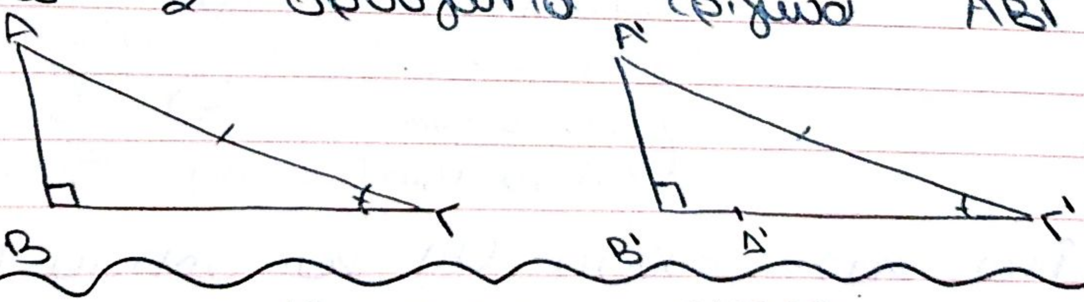


Τότε παρατηρώ ότι η ΑΔ βρίσκεται στο εσωτερικό της $Γ\hat{A}E \overset{ορισμό}{\iff} Γ\hat{A}Δ < Γ\hat{A}E$. Όμως η $Γ\hat{A}Δ$ είναι ορθή, και η $Γ\hat{A}E$ είναι επίσης ορθή ως παραπληρωματική της $E\hat{A}B$ η οποία είναι ορθή. Άρα έχω ότι 1 ορθή < 1 άλλη ορθή. <u>Άτοπο</u>, αφού 2 ορθές γωνίες είναι ίσες.
Άρα η μία κάθετη είναι μοναδική.

<u>Θεώρημα</u> (2ο κριτήριο ισότητας ορθ.)
Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, <u>αν-ν</u> έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία.

<u>Αποδ</u>

Έστω 2 ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABΓ}$ και $\overset{\triangle}{A'B'Γ'}$.



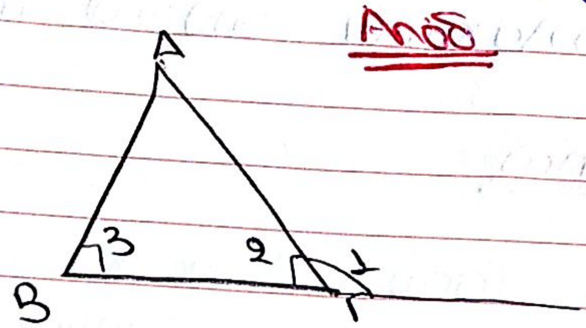
Ισχύει:

Αρκεί από 1ο κριτήριο ισότητας τρ. νδο ΒΓ = Β'Γ'.
Έστω ότι ΒΓ ≠ Β'Γ'. Υποθέτω ΒΓ < Β'Γ'
από αξίωμα ∃ Δ' τ.ω Β' * Δ' * Γ' έτσι ώστε
ΓΒ = Γ'Δ', άτοπο καθώς $A\hat{B}Γ = A\hat{Δ}Γ$ = <u>ορθή</u>
<u>άτοπο</u> (από το παρακάτω θεώρημα)

Θεώρημα (*): Σε κάθε τρίγωνο κάθε εξωτερική του γωνία είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι ορθές.

Πόρισμα: Δεν υπάρχει τρίγωνο με 2 ορθές.

Απόδ



Προεκτείνω την ΒΓ
$\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$ ως παραπλ. ορθής.
Όμως αφού $Γ_2$ ορθή τότε $\hat{Γ}_2 = \hat{B}_3$ (υποθ.)
Άτοπο στο θεώρημα.

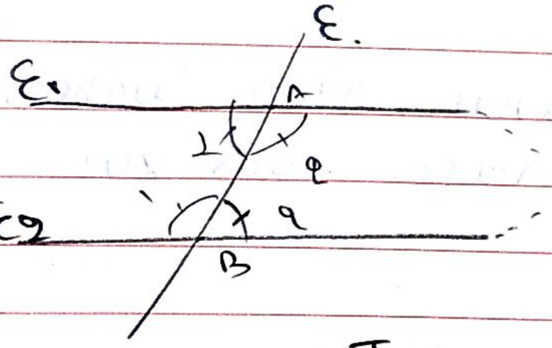
Πόρισμα: Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.

Απόδ

Έστω ότι δεν είναι παράλληλες, τότε τέμνονται. Άρα σχηματίζουν τρίγωνο με 2 ορθές.
Άτοπο από προηγούμενο πόρισμα.

Πόρισμα: Αν 2 ευθείες $(ε_1),(ε_2)$ τέμνονται από μια τρίτη $(τ)$ έτσι ώστε οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν να είναι ίσες $\Rightarrow ε_1 // ε_2$.

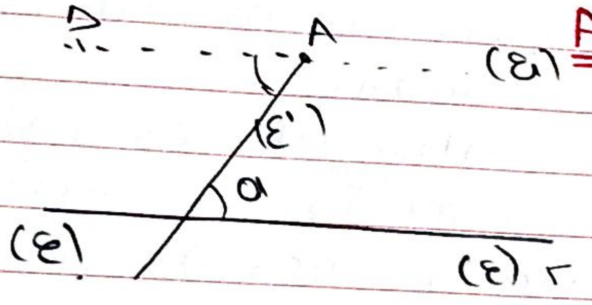
Απόδ



Έστω ότι δεν είναι παράλληλες. Άρα υπάρχει σημείο τομής. Έστω Γ το σημείο τομής τους.
Τότε σχηματίζεται τρίγωνο τ.ω. $\hat{ΑΒΓ}$ και από θεώρημα (*) καταλήγω σε άτοπο αφού $\hat{B}_2 = \hat{A}_1$ τότε
$\hat{A}_1$ εξωτερική στο $Β\hat{Γ}Α$ και
$\hat{B}_2$ απέναντι της

Πόρισμα: Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική κάθετος προς την ευθεία.

Θεώρημα: Από σημείο εκτός ευθείας (ε) άγεται μία τουλάχιστον ευθεία η οποία είναι // (ε).



Απόδ

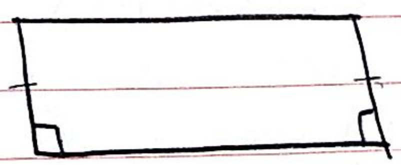
Έστω Α εκτός της (ε). Θεωρώ την ευθεία (ε') που διέρχεται από την Α και τέμνει την (ε) και έστω $A\hat{B}\Gamma = \hat{\alpha}$ η γωνία που σχηματίζεται. Από (I_4) θεωρώ ημιευθεία ΑΔ: $B\hat{A}\Delta = \hat{\alpha}$ και προεκτείνω την ΑΔ και έστω η (ε_1)

$\Rightarrow$ οι εντός εναλλάξ είναι ίσες $\Rightarrow (\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon)$ και $(\varepsilon_1), (\varepsilon)$ τέμνουσαι της (ε').

Saccheri (1667-1733): Προσπαθεί να αποδείξει το 5ο αίτημα ορίζοντας τα τετράπλευρα Saccheri.

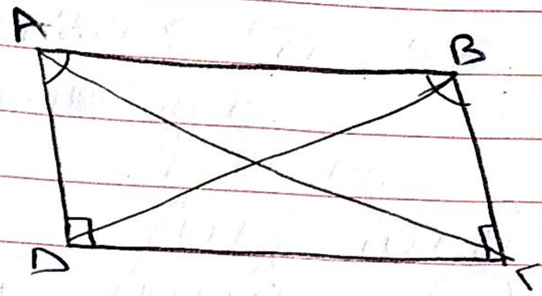
Ορισμός: Ένα τετράπλευρο, είναι τετρ. Saccheri αν έχει 2 απέναντι πλευρές ίσες και κάθετες στην ίδια πλευρά.

Saccheri



Πρόταση: Έστω ένα τετράπλευρο Saccheri
$A\Delta, B\Gamma \perp \Delta\Gamma$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} =$ ορθή $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$

Απόδ.



Έχω ότι $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma} = \overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$ αφού

$$\left\{\begin{array}{l} A\Delta = B\Gamma \\ \Delta\Gamma: \text{κοινή} \\ \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = \text{ορθή} \end{array}\right. \Rightarrow A\Gamma = B\Delta$$

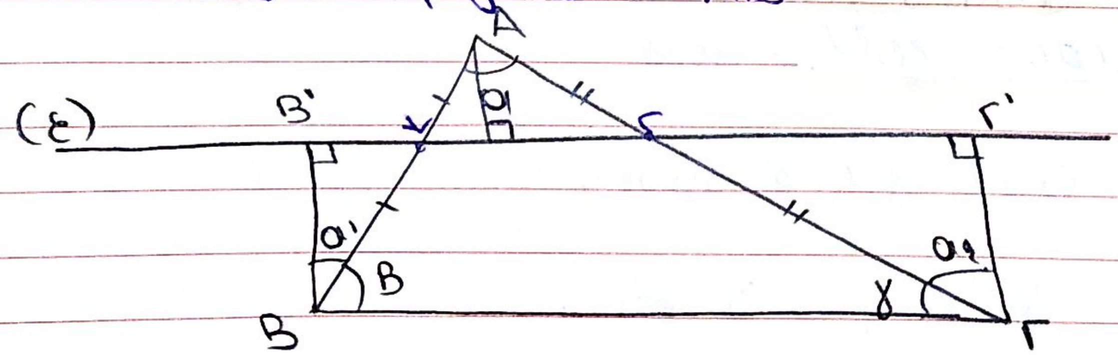
Επιπλέον $\overset{\triangle}{A\Delta B} = \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ αφού

$$\left\{\begin{array}{l} A\Gamma = B\Delta \\ AB: \text{κοινή} \\ A\Delta = B\Gamma \end{array}\right. \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}.$$

Υποθέσεις Saccheri:

1. Υπόθεση ορθής γωνίας: $\hat{A} = \hat{B} = 1$ ορθή (Ευκλ.)
2. Υπόθεση οξείας γωνίας: $\hat{A} = \hat{B} < 1$ ορθή (υπερβ)
3. υπόθεση αμβλείας γωνίας: $\hat{A} = \hat{B} > 1$ ορθή (ελλειπ)

Έστω τυχαίο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.



Να εξετάσω το $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}$.
Έστω K μέσο του AB και Λ μέσο του $A\Gamma$.
Φέρω κάθετες BB', $\Gamma\Gamma'$ στην (ε).
Τα $\overset{\triangle}{BB'K} = \overset{\triangle}{AA'K}$ (*) αφού είναι ορθογώνια και

$AK = BK$,
$\hat{K}_1 = \hat{K}_2$

$\Rightarrow BB' = AA'$

$A\hat{A}'\Lambda = \Gamma\hat{\Gamma}'\Delta$ (**) αφού ορθογώνια, $A\Delta = \Lambda\Gamma$ και $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2$
$\Rightarrow AA' = \Gamma\Gamma'$.

Άρα αφού $\left.\begin{array}{l} BB' = AA' \\ \wedge \; AA' = \Gamma\Gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow BB' = \Gamma\Gamma' \Rightarrow BB'\Gamma\Gamma'$ είναι Saccheri
$\Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$.
$\Rightarrow \hat{B} + \hat{\alpha}_1 = \hat{\gamma} + \hat{\alpha}_2$

και ισχύει ότι από (*) και (**) : $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}$.

Άρα $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) + \hat{\beta} + \hat{\gamma}$
$= (\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}) + (\hat{\alpha}_2 + \hat{\gamma})$
$= \hat{B} + \hat{\Gamma}$
$\Rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$

Συμπέρασμα: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των αγνώστων γωνιών του τετρ. Saccheri.

Έτσι στις υποθέσεις Saccheri που αναφέρθηκαν:

1. $A\hat{B}\Gamma = \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 2$ ορθ.

2. $A\hat{B}\Gamma$: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} < 2$ ορθές.

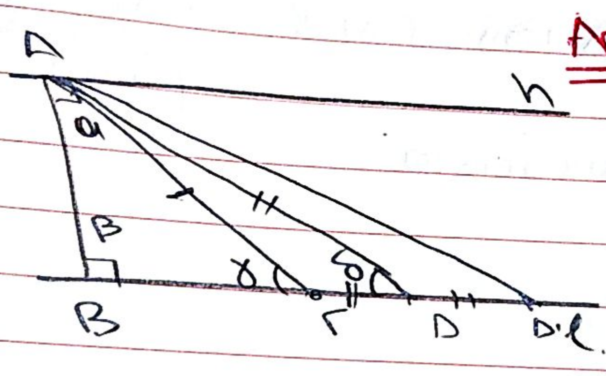
3. $A\hat{B}\Gamma$: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} > 2$ ορθές.

Πρόταση: Σ' ένα τετράπλευρο Saccheri :
i) υπόθεση ορθής γωνίας $\Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta$
ii) υπόθεση οξείας γωνίας $\Leftrightarrow AB > \Gamma\Delta$
iii) υπόθεση αμβλείας γωνίας $\Leftrightarrow AB < \Gamma\Delta$

Θεώρημα: Σε ένα τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι το πολύ 2 ορθές.

Θεώρημα: Αν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές τότε ⇒ ισχύει το αξίωμα της παραλληλίας

Απόδ



υπάρχει $h, \ell \perp (AB) \Rightarrow h \parallel \ell$.
Θα δο h: μοναδική παράλληλη της ℓ.

Γνωρίζω ότι $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 2$ορθ.

$\hat{\beta}$: ορθή

$\hat{\alpha} + \hat{\gamma} =$ ορθή.

Θεωρώ Δ τ.ω. $B * \Gamma * \Delta$ και $A\Gamma = \Gamma\Delta$.

Στην συνέχεια επιλέγω Δ_1 τ.ω. $A\Delta = \Delta\Delta_1$ (κ.ο.κ.)
Ισχυρίζομαι ότι $\hat{\delta} = \frac{\gamma}{2}$.

αφού στο $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$: $2\hat{\delta} + \left(\frac{2\text{ορθή}}{\gamma}\right) = 2$ορθές
$\Rightarrow \hat{\delta} = \frac{\gamma}{2}$

Συνεχίζοντας την κατασκευή αυτή με $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ σημεία αντίστοιχα ... Δ_n θα έχω γωνίες $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ τ.ω. $\hat{\delta}_n = \frac{\gamma}{2^{n+1}}$

⇒ Συνεπώς κάθε φορά μπορώ να έχω γωνία μικρότερη από οποιαδήποτε άλλη

Έστω ότι υπάρχει δεύτερο κ τ.ω $\kappa \neq \ell$ και

Έστω θ η γωνία των η, κ

Βάση των προηγούμενων μπορώ να βρω γωνία $\hat{\phi}_n$ τ.ω $\hat{\phi}_n < \hat{\theta}$ $\Rightarrow$

Έπεται η ΑΚ βρίσκεται στο εσωτερικό της $B\hat{A}\Delta_n$ και άρα $\Rightarrow$ η κ τέμνει την $B\Delta_n$ οπότε την ℓ $\Rightarrow$ άτοπο

Άρα απέδειξα την μοναδικότητα.